

IMAGES DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES À CERTAINES FORMES MODULAIRES DE SIEGEL DE GENRE 2

SALIM TAYOU

Abstract. We study the image of the ℓ -adic Galois representations associated to the four vector valued Siegel modular forms appearing in the work of Chenevier and Lannes [3]. These representations are symplectic of dimension 4. Following methods used by Dieulefait in [4], we determine the primes ℓ for which these representations are absolutely irreducible. In addition, we show that their image is "full" for all primes ℓ such that the associated residual representation is absolutely irreducible, except in two cases.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Action de l'inertie	4
3. Étude de l'irréductibilité	5
4. Sous-groupes maximaux du groupe projectif symplectique	9
5. Étude de l'image	11
6. Calculs explicites	16
Références	17

1. INTRODUCTION

Soient j, k des entiers ≥ 0 et $S_{j,k}(\Gamma_2)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de Siegel pour le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) =: \Gamma_2$ à coefficients vectoriels $\mathrm{Sym}^j \mathbb{C}^2 \otimes \det^k$ (on dira aussi "de poids (j, k) "). Dans ce travail, on s'intéresse à la détermination des images des représentations galoisiennes ℓ -adiques associées à quatre telles formes modulaires de poids dans la liste $\{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$. Notre motivation provient du travail de Chenevier et Lannes sur le comptage des p -voisinages au sens de Kneser entre réseaux de Niemeier (voir [3]), dans lequel ces formes interviennent de manière essentielle.

Date: 13 mai 2016.

On rappelle que l'espace $S_{j,k}(\Gamma_2)$ est muni d'une action d'opérateurs de Hecke (voir par exemple le chapitre 16 de [15]). Soit $f \in S_{j,k}(\Gamma_2)$ une forme propre pour l'action de ces opérateurs (f non nulle). Le sous-corps de \mathbb{C} engendré par les valeurs propres de l'action sur f des opérateurs en question est alors un corps de nombres, que l'on notera $\mathbb{Q}(f)$. De plus, on associe suivant Andrianov un produit Eulérien $\zeta_f(s) = \prod_p Q_p(p^{-s})^{-1}$, absolument convergent pour $\text{Re}(s)$ assez grand, où pour tout premier p l'élément $Q_p(X) \in \mathbb{Q}(f)[X]$ est un polynôme de degré 4 de la forme

$$Q_p(X) = 1 - a_p(f)X + b_p(f)X^2 - p^{2k+j-3}a_p(f)X^3 + p^{4k+2j-6}X^4,$$

les coefficients $a_p(f)$ et $b_p(f)$ étant les valeurs propres de certains opérateurs de Hecke explicites.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Weissauer [17] (voir également la discussion du chapitre VIII.2.15 de [3]).

Théorème 1.1. *Soit $f \in S_{j,k}(\Gamma_2)$ une forme propre pour l'action des opérateurs de Hecke. Pour tout nombre premier ℓ et toute place λ de $\mathbb{Q}(f)$ au dessus de ℓ , il existe un $\overline{\mathbb{Q}(f)}_\lambda$ -espace vectoriel V de dimension 4, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée b , ainsi qu'une représentation semi-simple et continue*

$$r_f : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GSp}(b)$$

non ramifiée hors de ℓ et vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) *pour tout nombre premier $p \neq \ell$, $\det(1 - Xr_f(\text{Frob}_p)) = Q_p(X)$,*
- (ii) *si $\eta : \text{GSp}(b) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}(f)}_\lambda^\times$ est le facteur de similitude associé à b , alors on a $\eta \circ r_f = \chi_\ell^{j+2k-3}$, χ_ℓ désignant le caractère cyclotomique ℓ -adique.*

On rappelle que Tsushima a déterminé dans [14] une formule explicite pour la dimension de l'espace $S_{j,k}(\Gamma_2)$ pour $k \geq 5$. Cette dimension vaut 1 pour les quatre couples (j, k) dans $\{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$ déjà mentionnés. Si f est un élément non nul de $S_{j,k}(\Gamma_2)$ pour l'une de ces quatre valeurs, il est en particulier automatiquement vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke. De plus, on a alors $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}$ et les polynômes Q_p associés à f sont dans $\mathbb{Z}[X]$ d'après la proposition IX.1.9 de [3]. On notera $r_{j,k,\ell}$ la représentation ℓ -adique r_f associée à cette forme f et à ℓ par le théorème ci-dessus. C'est une représentation irréductible d'après un résultat de Calegari et Gee [1] et le §X.1.3 de [3].

On notera également $\overline{r_{j,k,\ell}}$ la $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ -représentation résiduelle associée à $r_{j,k,\ell}$ par un procédé standard (voir par exemple la discussion à la fin du chapitre X.1 de [3]). Disons brièvement que la représentation $r_{j,k,\ell}$ est

définie sur une extension finie E de \mathbb{Q}_ℓ et admet un \mathcal{O}_E -réseau stable L . On définit $\overline{r_{j,k,\ell}}$ comme étant la semi-simplifiée de la représentation $L/(\pi_E L) \otimes_{\mathcal{O}_E/\pi_E} \overline{\mathbb{F}_\ell}$, où π_E désigne une uniformisante de \mathcal{O}_E . Elle est en fait définie sur le corps fini \mathbb{F}_ℓ et peut être choisie à valeurs dans le groupe fini $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ (voir *loc. cit.*). Elle est continue, non-ramifiée hors de ℓ , et vérifie des conditions similaires aux (i) et (ii) de l'énoncé ci-dessus, dans lesquelles Q_p et χ_ℓ sont remplacés par leurs réductions modulo ℓ .

Théorème 1.2. *Soit ℓ un nombre premier. Alors la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est absolument irréductible si, et seulement si, on a $\ell \geq 7$ et si l'on est dans l'un des cas suivants :*

$$(j, k) = (6, 8) \quad \text{et} \quad \ell \neq 11, 17, \quad (j, k) = (8, 8) \quad \text{et} \quad \ell \neq 13, 17, 23, \\ (j, k) = (12, 6) \quad \text{et} \quad \ell \neq 7, 13, 19, \quad (j, k) = (4, 10) \quad \text{et} \quad \ell \neq 11, 19, 41.$$

Une partie des résultats de ce théorème est déjà connue d'après le théorème X.4.4 et la prop. X.4.10 de [3] pour des petites valeurs de ℓ ($\ell < j + 2k - 3$) et pour $(8, 8, 23)$ et $(4, 10, 41)$. Pour ℓ assez grand, nous reprenons la méthode de Dieulefait dans [4], qui démontre que le théorème vaut pour tout ℓ assez grand, et ce avec un minorant effectif. Un examen de cette méthode, ainsi que la connaissance des polynômes caractéristiques de $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ pour $p = 2, 3$ (déterminés par Faber et van der Geer dans [15, §3], voir aussi [3, tables C.3 et C.4] et [8]), nous permet de conclure pour tout triplet non couvert par les résultats de Chenevier et Lannes [3].

Le théorème principal que l'on démontre dans cet article est le suivant :

Théorème 1.3. *Soit ℓ un nombre premier. On suppose que $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est absolument irréductible et que $(j, k, \ell) \neq (6, 8, 13), (4, 10, 17)$. Alors l'image de la représentation $r_{j,k,\ell}$ est conjuguée à*

$$\{M \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell) \mid \eta(M) \in (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{j+2k-3}\}.$$

La démonstration de ce théorème procède de la manière suivante. Tout d'abord, on se ramène (par un argument dû à Serre) à montrer que l'image de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ contient $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Si ce n'était pas le cas, cette image serait incluse dans l'un des sous-groupes maximaux de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ classifiés par Mitchell [9] (voir le §4). Nous élaborons pour cela la méthode de Dieulefait [4] et dégageons des critères effectifs permettant d'exclure chacun des cas possibles. L'application de ces critères nécessite de connaître le polynôme caractéristique de $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ pour $p \leq 13$, qui est connu d'après [3, table C.3, C.4]. Mentionnons que le cas $(6, 8, 13)$ non traité par le théorème 1.3 a déjà été mis en évidence dans les travaux de Chenevier et Lannes (voir [3] chapitre X. remarque

4.11 où une conjecture est faite). Le fait que le cas $(4, 10, 17)$ soit particulier semble nouveau. Les résultats des calculs laissent penser que l'image stabilise un plan non dégénéré dans $\Lambda^2 V$. Il serait intéressant d'avoir une démonstration de ces résultats.

L'article s'organise comme suit : dans le premier paragraphe, on donne des rappels sur les caractères fondamentaux ainsi que la description de la restriction de $\overline{r}_{j,k,\ell}$ à un sous-groupe d'inertie en ℓ . Dans le deuxième paragraphe, on démontre l'irréductibilité des représentations $\overline{r}_{j,k,\ell}$. Dans le troisième paragraphe, on énonce la liste des sous-groupes maximaux de $\mathrm{PGSp}(4, \mathbb{F}_\ell)$. Enfin, le dernier paragraphe démontre le théorème 1.3.

Les méthodes de cet article permettent sans doute d'obtenir des résultats analogues concernant les représentations galoisiennes ℓ -adiques associées à des formes propres dans $S_{j,k}(\Gamma_2)$ pour d'autres couples (j, k) que ceux considérés ici, du moins lorsque la dimension de cet espace est 1 et que ℓ est assez grand. Cependant, si l'on désire des résultats complets (incluant toutes les valeurs de ℓ , notamment les petites) il faut pouvoir disposer de diverses congruences, comme celles "à la Harder" démontrées dans [3, Thm 4.4], ainsi que de tables de polynômes caractéristiques de Frobenius (il n'est pas certain que celles de Faber et van der Geer suffisent). Mégarbané nous a communiqué des résultats dans ce sens pour les formes vérifiant $j + 2k - 3 = 25$.

Remerciements. Je tiens à remercier Gaëtan Chenevier pour sa relecture détaillée, ses remarques judicieuses et son encadrement pour l'écriture de cet article. Je remercie également Quentin Guignard et Thomas Mégarbané pour les corrections apportées à ce document.

2. ACTION DE L'INERTIE

Caractères fondamentaux. Une bonne référence pour cette partie est le premier paragraphe de l'article de Serre [11]. On se donne un nombre premier ℓ , et on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du corps des nombres ℓ -adiques \mathbb{Q}_ℓ et $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ du corps fini \mathbb{F}_ℓ . On fixe un isomorphisme $\sigma : \mathbb{Z}_\ell^{nr} / \ell \mathbb{Z}_\ell^{nr} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_\ell}$, où \mathbb{Z}_ℓ^{nr} désigne l'anneau des entiers de l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_ℓ dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et que l'on note \mathbb{Q}_ℓ^{nr} . Le groupe d'inertie en ℓ est $I_\ell = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell} / \mathbb{Q}_\ell^{nr})$.

Si $N > 0$, on notera x_N une racine $(\ell^N - 1)$ -ième de ℓ dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. On définit alors le caractère fondamental de niveau N par la composée

$$\psi_N : I_\ell \rightarrow \mu_{\ell^N - 1} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$$

donnée par

$$\tau \mapsto \frac{\tau(x_N)}{x_N} \mapsto \sigma \left(\frac{\tau(x_N)}{x_N} \right).$$

Ceci est indépendant du choix de x_N car I_ℓ agit trivialement sur les racines $(\ell^N - 1)$ -ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. L'image de ψ_N est alors le groupe multiplicatif de l'unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ de cardinal ℓ^N . On peut vérifier que ψ_1 est la réduction modulo ℓ du caractère cyclotomique χ_ℓ restreint à I_ℓ . D'autre part, si M divise N alors $\psi_M = \psi_N^{\frac{\ell^N - 1}{\ell^M - 1}}$.

Soit $\psi : I_\ell \rightarrow \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$ un caractère continu. Il existe un entier $N \geq 1$ et un entier $0 \leq a < \ell^N$ tel que $\psi = \psi_N^a$. Notons a' l'unique élément de $\{0, \dots, \ell - 1\}$ tel que $a \equiv a' \pmod{\ell}$. Observons que a' ne dépend pas du choix de l'écriture de ψ sous la forme $\psi = \psi_N^a$. En effet, supposons que l'on ait l'égalité $\psi_N^a = \psi_M^b$. On constate que l'on a $\psi_N^a = \psi_{NM}^{a \frac{\ell^{NM} - 1}{\ell^N - 1}}$, $0 \leq a \frac{\ell^{NM} - 1}{\ell^N - 1} < \ell^{NM}$ et la congruence $a \equiv a \frac{\ell^{NM} - 1}{\ell^N - 1} \pmod{\ell}$. En procédant de manière similaire pour b , on peut donc supposer que $N = M$, ce qui entraîne $a = b$. Nous appellerons *poids* de ψ l'élément $a' \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ bien défini par ces observations. On le note $k(\psi)$.

Soit V une $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ -représentation continue de dimension finie d du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit U la semi-simplifiée de la restriction de V à I_ℓ . C'est une somme directe de d caractères. On appelle *poids d'inertie modérée* de V la collection des poids de ces caractères. Il s'agit donc d'une famille de d entiers (non nécessairement distincts) de $\{0, \dots, \ell - 1\}$.

Lemme 2.1. *Soit V une $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ -représentation continue de dimension finie d du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On suppose que V a pour poids d'inertie modérée les entiers k_i avec $i = 1, \dots, d$. On suppose de plus que $k_i + k_j < \ell$ pour $i < j$. Alors les poids d'inertie modérée de $\Lambda^2 V$ sont les $k_i + k_j$ avec $i < j$.*

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

Action de l'inertie. Soit ℓ un nombre premier. On a défini dans l'introduction une représentation galoisienne ℓ -adique $\overline{r_{j,k,\ell}}$ pour $(j, k) \in \{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$. La proposition suivante décrit l'action du groupe d'inertie en ℓ . On fixe un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$, ce qui nous fournit un morphisme de groupes $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. D'après les rappels ci-dessus concernant la définition de $r_{j,k,\ell}$, et d'après [2], la représentation $r_{j,k,\ell}$ est une $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -représentation cristalline de dimension 4, de poids de Hodge-Tate 0, $k - 2$, $j + k - 1$, et $j + 2k - 3$. Le théorème de Fontaine-Laffaille [5] admet donc la conséquence suivante.

Proposition 2.2. *On suppose $\ell > j + 2k - 2$. Les poids d'inertie modérée de la restriction de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$, sont 0, $k - 2$, $j + k - 1$ et $j + 2k - 3$.*

3. ÉTUDE DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ

On va étudier l'irréductibilité des $\overline{r_{j,k,\ell}}$ pour $(j, k) \in \{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$. Le but sera de démontrer le théorème 1.2. Soient p un nombre

premier et (j, k) l'un des quatre couples définis dans l'introduction. Si $r \geq 1$ est un entier, on note $\tau_{j,k}(p^r)$ la trace de Frob_p^r dans la représentation $r_{j,k,\ell}$. D'après le théorème 1.1 et [3, Prop. IX.1.9], c'est un nombre entier indépendant du choix du nombre premier $\ell \neq p$. Le polynôme caractéristique de $r_{j,k,\ell}(\text{Frob}_p)$ est alors de la forme :

$$\begin{aligned} P_{j,k,p}(X) &= X^4 Q_p\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^4 - \tau_{j,k}(p)X^3 + \frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2}X^2 - \tau_{j,k}(p)p^{2k+j-3}X + p^{4k+2j-6}. \end{aligned}$$

Le calcul des $\tau_{j,k}(p^r)$ pour des petites valeurs de p et r a été effectué par Faber et van der Geer (voir le chapitre 25 dans [15]), et de manière différente par Chenevier et Lannes dans [3]. Nous n'utiliserons ces calculs explicites que pour $p = 2, 3, 5, 7, 13$.

La représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ vérifie $\overline{r_{j,k,\ell}}^* \simeq \overline{r_{j,k,\ell}} \otimes \chi_\ell^{-(j+2k-3)}$. On en déduit que l'ensemble fini $J(\overline{r_{j,k,\ell}})$ des facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est stable par l'opération $W \mapsto W^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3}$. Observons d'abord que $J(\overline{r_{j,k,\ell}})$ ne peut pas contenir des éléments de dimension 3. En effet, dans le cas contraire, soit W un tel élément, alors W est irréductible et la restriction b_W de la forme bilinéaire alternée b à W est dégénérée. Son noyau est alors de dimension 1 ou 3. Mais comme b est d'indice 2, le noyau de b_W est de dimension 1 et c'est une sous-représentation de W ce qui n'est pas possible.

L'objectif est de montrer que $J(\overline{r_{j,k,\ell}})$ est réduit à un singleton sauf dans les cas exclus par le théorème 1.2. Si $\ell \leq j + 2k - 3$, cela résulte de la proposition 4.10 du chapitre X de [3]. Cependant, les critères d'irréductibilité *ad hoc* employés *loc. cit.*, qui donnent des conditions suffisantes mais non nécessaires a priori, deviennent fastidieux à vérifier, notamment le calcul de l'entier κ , quand ℓ grandit. De plus, ils ne permettent au mieux que de traiter un nombre fini de valeurs de ℓ , pour un (j, k) donné. L'ingrédient nouveau utilisé ci-dessous est l'action de l'inertie en ℓ .

On suppose dorénavant $\ell > j + 2k - 3$. Si $J(\overline{r_{j,k,\ell}})$ n'est pas un singleton, alors on n'est dans l'une des situations suivantes :

Existence d'une droite stable. Comme la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est non ramifiée hors de ℓ , l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur une droite stable D est donnée par une puissance entière de χ_ℓ (Kronecker-Weber). Comme de plus on a $\ell > j + 2k - 2$, la proposition 2.2 montre que c'est χ_ℓ^i avec $i = 0, k-2, j+k-1, j+2k-3$. Il s'ensuit que $\chi_\ell^i(\text{Frob}_p)$ pour ℓ premier différent de p , est racine du polynôme $P_{j,k,p}$ modulo ℓ . D'autre part, $D^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3}$ est également une droite stable, donc $\chi_\ell^{j+2k-3-i}(\text{Frob}_p)$ est également racine du polynôme $P_{j,k,p}$ modulo ℓ . On a donc, selon la valeur de i , que 1 ou $\chi_\ell^{j+k-1}(\text{Frob}_p)$ est racine du polynôme $P_{j,k,p}$

modulo ℓ , pour ℓ nombre premier différent de p .

Dans le premier cas, on obtient la condition que ℓ divise le nombre :

$$A_{j,k}(p) = \frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - \tau_{j,k}(p)(p^{2k+j-3} + 1) + p^{4k+2j-6} + 1.$$

Dans le second cas, on doit avoir ℓ qui divise :

$$B_{j,k}(p) = p^{2k-4}(1 + p^{2j+2}) - \tau_{j,k}(p)p^{k-2}(1 + p^{j+1}) + \frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2}.$$

Existence de deux composantes de dimension 2 reliées. C'est le cas où la représentation se décompose en somme de deux représentations galoisiennes irréductibles :

$$\overline{r_{j,k,\ell}} \simeq \pi_1 \oplus \pi_2$$

telle que $\pi_1^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3} \simeq \pi_2$. Cette relation montre que les ensembles P_1 et P_2 , constitués respectivement des poids de l'inertie modérée de π_1 et π_2 , vérifient $P_2 = -P_1 + j + 2k - 3$. Comme $\ell > j + 2k - 2$, 0 est dans P_1 (quitte à échanger π_1 et π_2), auquel cas $j + 2k - 3$ est dans P_2 , et donc $P_1 = \{0, j + k - 1\}$ ou $P_1 = \{0, k - 2\}$ (noter que les quatre poids sont distincts par hypothèses). Deux cas sont alors à envisager.

Dans le premier cas, le polynôme $P_{j,k,p}$ se factorise modulo ℓ sous la forme :

$$P_{j,k,p}(X) = (X^2 - AX + p^{3k+j-5}) \left(X^2 - \frac{A}{p^{k-2}}X + p^{j+k-1} \right).$$

En identifiant et en éliminant A , on voit que ℓ doit diviser

$$C_{j,k}(p) = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - p^{j+k-1} - p^{j+3k-5} \right) (1 + p^{k-2})^2 - p^{k-2} \tau_{j,k}(p)^2.$$

Dans le second cas, on doit avoir une factorisation de la forme :

$$P_{j,k,p}(X) = (X^2 - AX + p^{3k+2j-4}) \left(X^2 - \frac{A}{p^{j+k-1}}X + p^{k-2} \right).$$

En identifiant et en éliminant A , on voit que ℓ doit diviser :

$$D_{j,k}(p) = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - p^{k-2} - p^{2j+3k-4} \right) (1 + p^{j+k-1})^2 - p^{j+k-1} \tau_{j,k}(p)^2.$$

Existence de deux composantes de dimension 2 non reliées. Dans ce dernier cas, $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est la somme de deux représentations irréductibles $\overline{r_{j,k,\ell}} \simeq \pi_1 \oplus \pi_2$ avec $\pi_1^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3} \simeq \pi_1$ et $\pi_2^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3} \simeq \pi_2$.

Comme $\ell > j + 2k - 2$, la proposition 2.2 s'applique. Quitte à échanger les rôles de π_1 et π_2 , on peut supposer que 0 est un poids de l'inertie modérée de π_1 , de sorte que ses deux poids sont 0 et $j + 2k - 3$, et ceux de π_2 sont $k - 2$ et $j + k - 1$.

On utilise alors la résolution par Wintenberger et Khare de la conjecture de Serre (voir [6] et [12]). En effet, considérons la représentation $\rho := \pi_2 \otimes \chi_\ell^{2-k}$. Elle est irréductible (comme représentation du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q}). Elle est impaire car son déterminant est $\chi_\ell^{j+2k-3-2k+4} = \chi_\ell^{j+1}$, et $j+1$ est impair. Comme elle est non ramifiée hors de ℓ , le conducteur $N(\rho)$ de ρ est 1. Les poids de l'inertie modérée de ρ sont $0 < j+1 < \ell$. Si la restriction de ρ à I_ℓ est irréductible, alors le poids de Serre $k(\rho)$ vaut $j+2$ par la recette de Serre. Dans les autres cas, elle est réductible de semi-simplifiée $1 \oplus \chi_\ell^{j+1}$. Mais par construction de $\overline{r_{j,k,\ell}}$, la restriction à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ de la représentation π_2 est du type de celles étudiées par Fontaine et Laffaille dans [5]. On a $k-2 < j+k-1$, d'après ces auteurs (voir aussi le théorème 2 de [16]), c'est donc nécessairement une extension de χ_ℓ^{k-2} par χ_ℓ^{j+k-1} , comme on le voit sur le module filtré associé. Ainsi, ρ est une extension de 1 par χ_ℓ^{j+1} , de sorte que la recette de Serre donne encore $k(\rho) = j+2$ car on a $1 < j+1 < \ell-1$. D'après Khare, ρ est donc la représentation résiduelle associée à une forme modulaire parabolique pour $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids $j+2$. Mais pour $j = 4, 6, 8, 12$, l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $j+2$ pour $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ est nul, une contradiction.

Résultats des calculs explicites. En utilisant les tables données dans [3], on calcule $A_{j,k}(p)$, $B_{j,k}(p)$, $C_{j,k}(p)$ et $D_{j,k}(p)$ pour certains nombres premiers p . On retiendra le fait que les conditions de réductibilité précédemment étudiées imposent à ℓ de diviser les éléments de chaque ligne des tables 2, 3, 4 et 5, dès que ℓ est supérieur à $j+2k-2$. On remarquera par exemple que 23 divise les éléments de la troisième ligne pour $(j,k) = (8,8)$ et 41 divise les éléments de la deuxième ligne pour $(j,k) = (4,10)$. Cela permet donc de compléter la démonstration du théorème 1.2.

Le résultat suivant résulte sans doute (pour tout ℓ) de la construction des $r_{j,k;\ell}$ par Weissauer [17]. Nous en proposons ci-dessous une démonstration alternative.

Corollaire 3.1. *Soient (j,k) l'un des quatre couples ci-dessus et ℓ un nombre premier ≥ 7 . Alors la représentation $r_{j,k,\ell}$ est définie sur \mathbb{Q}_ℓ . En particulier, son image est conjuguée à un sous-groupe de $\text{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.*

Preuve du corollaire 3.1. Nous avons déjà dit que la représentation $r_{j,k,\ell}$ est irréductible, et à traces dans $\mathbb{Q}(f)_\ell = \mathbb{Q}_\ell$. Soit R la \mathbb{Q}_ℓ -algèbre engendrée par le groupe $r_{j,k,\ell}(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ dans l'anneau des endomorphismes de V . La théorie de Wedderburn assure que R est centrale et simple de rang 16. D'après la propriété (ii) du théorème 1.1, les conjugués complexes de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ont pour valeurs propres 1, 1, -1 , -1 . Ce n'est donc pas une algèbre à division et on a alors deux cas possibles : soit $R \simeq M_4(\mathbb{Q}_\ell)$, ce qui équivaut à dire que la représentation

$r_{j,k,\ell}$ est définie sur \mathbb{Q}_ℓ , soit $R \simeq M_2(H)$ où H est l'unique algèbre de quaternions sur \mathbb{Q}_ℓ . Dans ce deuxième cas, la représentation résiduelle $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est alors somme directe de deux représentations de dimension 2, disons (V_1, r_1) et (V_2, r_2) , toutes les deux définies sur \mathbb{F}_{ℓ^2} , et telles que $(V_2, r_2) \simeq (V_1, \phi_\ell \circ r_1)$, où $\phi_\ell : \mathrm{GL}(V_1) \rightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ est l'élévation à la puissance ℓ . Bien entendu, cette possibilité est exclue si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible, de sorte qu'il n'y a qu'un nombre fini de cas restant à traiter d'après le théorème précédent. Or, dans ces cas, la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ a été étudiée dans le Théorème X.4.4 de [3]. D'après cette référence, elle est alors réductible, tous ses facteurs sont définis sur \mathbb{F}_ℓ , et ils sont sans multiplicité si $\ell \geq 7$. \square

4. SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE PROJECTIF SYMPLECTIQUE

Soient k un corps de caractéristique différente de 2, V un espace vectoriel de dimension 4 sur k muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée A . La forme A définit un élément de $\Lambda^2 V^*$. On définit le groupe des similitudes symplectiques de A comme suit :

$$\mathrm{GSp}(A) := \{g \in \mathrm{GL}(V), \exists \eta(g) \in k^\times, \forall x, y \in V, A(g(x), g(y)) = \eta(g)A(x, y)\}.$$

Le scalaire $\eta(g)$ s'appelle facteur de similitude de g et l'application $\eta : \mathrm{GSp}(A) \rightarrow k^\times$ est un morphisme de groupe, de noyau le groupe $\mathrm{Sp}(A)$, le groupe symplectique associé à A , et on a la suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \mathrm{Sp}(A) \rightarrow \mathrm{GSp}(A) \xrightarrow{\eta} k^\times \rightarrow 1.$$

On suppose que V est muni d'une base (e_0, e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de A est $J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$. On note dans ce cas

$$\mathrm{GSp}_4(k) := \mathrm{GSp}(A), \quad \mathrm{Sp}_4(k) := \mathrm{Sp}(A)$$

et on a donc :

$$\mathrm{GSp}_4(k) = \{M \in M_4(k), \exists \eta(M) \in k^\times : M^t J M = \eta(M) J\}.$$

On note $\mathrm{PGSp}(A)$ le quotient du groupe $\mathrm{GSp}(A)$ par son centre, formé des homothéties. De même, $\mathrm{PSp}(A)$ est le quotient de $\mathrm{Sp}(A)$ par $\{\pm \mathrm{Id}_V\}$, où Id_V désigne l'application identité de V . On a alors la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathrm{PSp}(A) \rightarrow \mathrm{PGSp}(A) \xrightarrow{\eta} k^\times / k^{\times 2} \rightarrow 1.$$

On dispose d'une application bilinéaire :

$$b : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^4 V$$

induite par l'application multilinéaire alternée

$$\begin{aligned} V \times V \times V \times V &\rightarrow \Lambda^4 V \\ (u, v, w, z) &\mapsto u \wedge v \wedge w \wedge z. \end{aligned}$$

L'application b est symétrique car les tenseurs d'ordre 2 commutent. Elle est non dégénérée. Ceci peut se voir simplement en écrivant sa matrice dans la base des tenseurs purs associés à la base (e_0, e_1, e_2, e_3) . Identifions (de manière un peu arbitraire) la droite $\Lambda^4 V$ à k au moyen de la base $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Cela permet de voir b comme une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\Lambda^2 V$ (on peut même vérifier qu'elle est hyperbolique, ou autrement dit, qu'elle possède un sous-espace isotrope de dimension 3). En particulier, elle induit un isomorphisme entre $\Lambda^2 V$ et $\Lambda^2 V^*$. Notons \tilde{A} l'élément de $\Lambda^2 V$ qui correspond à la forme symplectique A via cet isomorphisme. Par définition, on a la relation $A(v, w)e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = v \wedge w \wedge \tilde{A}$ pour tous $v, w \in V$, et donc l'identité $\tilde{A} = -e_0 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3$. En particulier, on constate que l'on a $b(\tilde{A}, \tilde{A}) = -2 \neq 0$: l'élément \tilde{A} n'est pas isotrope pour b dans $\Lambda^2 V$.

Le groupe linéaire de V agit de manière naturelle sur $\Lambda^2 V$. Tout élément de $\text{GL}(V)$ est une similitude pour b , c'est-à-dire un élément de $\text{GO}(b)$. De plus, le facteur de similitude d'un élément $g \in \text{GL}(V)$ pour la forme b est le déterminant de g . En effet, cela découle de l'égalité, valable pour u, v, w, z des éléments de V :

$$(\wedge^4 g)(u \wedge v \wedge w \wedge z) = \det(g) u \wedge v \wedge w \wedge z.$$

Le sous-groupe $\text{GSp}(A)$ agit, par définition, de manière scalaire sur A , et par suite sur \tilde{A} aussi. Il stabilise donc $H = \tilde{A}^\perp$. La forme b restreinte à H , que l'on notera b_H , est non-dégénérée car on a vu que \tilde{A} n'est pas isotrope. On a ainsi défini un morphisme naturel $\iota : \text{GSp}(A) \rightarrow \text{GO}(b_H)$. En fait, le groupe $\text{GSp}(A)$ agit sur $H \otimes \eta^{-1}$ par des éléments de $\text{SO}(b_H)$, de sorte que l'on a construit un morphisme de groupes $\text{PGSp}(A) \rightarrow \text{SO}(b_H)$; il est bien connu que c'est un isomorphisme.

On suppose que $\text{char } k \neq 3$. On rappelle que le groupe $\text{GL}_2(k)$ agit sur l'espace $\text{Sym}^3 k^2$ par des similitudes symplectiques, relativement à une forme bilinéaire alternée non dégénérée convenablement fixée sur $\text{Sym}^3 k^2$ (une telle forme étant d'ailleurs unique à un scalaire près). Cela définit un homomorphisme injectif $\text{PGL}_2(k) \rightarrow \text{PGSp}_4(k)$, appelé *plongement principal*, dont la classe de conjugaison est canonique. Un tel sous-groupe de $\text{PGSp}_4(k)$ peut aussi être défini comme étant le stabilisateur d'une "cubique tordue" de l'espace projectif $\text{P}(V)$ [9].

Mitchell a classifié dans [9] les sous-groupes maximaux de $\text{PSp}_4(\mathbb{F}_q)$. Cette classification est reprise par King dans [7], page 8. On peut vérifier que ces diverses formulations impliquent la classification suivante pour $\text{PGSp}_4(\mathbb{F}_q)$.

Théorème 4.1. *Soient ℓ un nombre premier > 3 , V et H les \mathbb{F}_ℓ -représentations naturelles de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ décrites ci-dessus, de dimensions respectives 4 et 5. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Alors soit G contient $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, soit il est inclus dans l'un des sous-groupes suivants :*

- (1) *Stabilisateur d'une droite de V ,*
- (2) *Stabilisateur d'un plan isotrope de V (ou ce qui revient au même, d'une droite isotrope de H),*
- (3) *Stabilisateur d'une droite non isotrope de H ,*
- (4) *Stabilisateur d'un plan non dégénéré de H ,*
- (5) *Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ plongé de manière principale,*
- (6) *Un groupe contenant un sous-groupe d'indice ≤ 2 qui est extension de \mathcal{A}_5 , ou de \mathcal{S}_5 , par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$,*
- (7) *Un groupe contenant un sous-groupe d'indice ≤ 2 isomorphe à \mathcal{A}_6 , \mathcal{S}_6 ou \mathcal{A}_7 (et dans ce dernier cas on a $\ell = 7$).*

Remarque 4.2. Dans la terminologie de Mitchell, si U est un sous-groupe de $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ du type (2), (3), (4) ou (5), alors U est le stabilisateur d'une congruence parabolique, d'une congruence hyperbolique ou elliptique de $\Lambda^2 V$ contenant \tilde{A} , d'une quadrique de $\Lambda^2 V$ ou d'une cubique tordue de $\Lambda^2 V$.

5. ÉTUDE DE L'IMAGE

Notre objectif dans ce chapitre est de démontrer le théorème 1.3 de l'introduction. Soient (j, k) l'un des quatre couples de l'introduction, ℓ un nombre premier, ρ la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ notée $r_{j,k,\ell}$ dans l'introduction, et $\overline{\rho} := \overline{r_{j,k,\ell}}$ sa représentation résiduelle. Comme on l'a déjà expliqué, $\overline{\rho}$ est définie sur \mathbb{F}_ℓ , et prend ses valeurs dans le groupe des similitudes symplectiques d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée bien choisie, de sorte que l'on peut supposer que l'on a

$$\mathrm{Im} \overline{\rho} \subset \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell).$$

Conformément à la section 4, on notera V le \mathbb{F}_ℓ -espace vectoriel de dimension 4 sous-jacent, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On note de plus G_ℓ l'image de $\overline{\rho}$ dans $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ et PG_ℓ l'image de G_ℓ dans $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$.

On se place dans les hypothèses du théorème 1.2, de sorte que la représentation $\bar{\rho} = V \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est irréductible. En particulier, on a $\ell \geq 7$. On suppose que PG_ℓ ne contient pas $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Il est donc contenu dans l'un des sous-groupes maximaux du type (1) à (7) dans la liste du théorème 4.1. Nous allons procéder à une étude au cas par cas. L'idée est de montrer que la forme de l'image est incompatible soit avec l'action de l'inertie quand ℓ est assez grand, soit avec l'action du Frobenius en $p \neq \ell$ quand ℓ est petit. On rappelle que la représentation $H \subset \Lambda^2 V$ a été introduite à la section 4 et que $\Lambda^2 V$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle.

Cas (1) ou (2) : Stabilisateur d'une droite, ou d'un plan isotrope, de V . Ce n'est pas possible car la représentation est irréductible.

Cas (3) ou (4) : Stabilisateur d'une droite ou d'un plan non dégénérés de H . Dans les deux cas, G_ℓ préserve un plan non dégénéré $P \subset \Lambda^2 V$. En particulier, la représentation naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $P \otimes \chi_\ell^{-w}$, avec $w = j + 2k - 3$, définit un homomorphisme

$$r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{O}(P)$$

(le groupe orthogonal du plan quadratique P). Il est bien connu que les vecteurs isotropes de $\Lambda^2 V \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ sont exactement les tenseurs purs ("quadrique de Klein"). Comme ρ est irréductible, elle n'admet pas de plan stable, et donc $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ne stabilise aucune des deux droites isotropes de $P \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Son image n'est donc pas incluse dans $\mathrm{SO}(P)$. Autrement dit, l'homomorphisme

$$\epsilon := \det r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \{\pm 1\}$$

est non trivial. Il est continu, et non ramifié hors de ℓ , par construction. Il définit donc une extension quadratique de \mathbb{Q} non ramifiée hors de ℓ . Mais il est bien connu qu'une telle extension est nécessairement ramifiée en ℓ (c'est $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}\ell}\right)$), autrement dit que $\epsilon(I_\ell) = \{\pm 1\}$. On a donc montré que

$$(1) \quad \epsilon = \chi_\ell^{\frac{\ell-1}{2}}.$$

D'autre part, on a $\ell > 2$ donc tout élément de $\mathrm{O}(P)$ est semi-simple. L'inertie sauvage de I_ℓ agit trivialement dans r , et le sous-groupe $r(I_\ell)$ est cyclique (d'ordre premier à ℓ). Si σ en est un générateur, on a donc $\det(\sigma) = -1$: c'est une symétrie orthogonale. Ainsi, la restriction de r à I_ℓ est somme du caractère trivial et d'un caractère d'ordre 2 : c'est donc $1 \oplus \chi_\ell^{\frac{\ell-1}{2}}$.

Pour éliminer cette éventualité, faisons d'abord l'hypothèse supplémentaire

$$\ell > 2w,$$

avec $w = j + 2k - 3$. Sous cette hypothèse, qui entraîne $\ell > j + 2k - 2$ et $2j + 3k - 4 \leq \ell - 1$, la proposition 2.2 et le lemme 2.1 assurent que les poids d'inertie modérée agissant sur $\Lambda^2 V$ sont les entiers distincts

$$(2) \quad k - 2 < j + k - 1 < j + 2k - 3 < j + 3k - 5 < 2j + 3k - 4$$

(on a dans tous les cas $j \geq 4$, $k \geq 6$), avec $j + 2k - 3$ de multiplicité 2. En particulier, les deux poids de l'inertie modérée de $r \otimes \chi_\ell^w \subset \Lambda^2 V$ sont dans cette liste. Mais d'après le paragraphe précédent, et l'hypothèse $\ell > 2w$, ces deux poids sont w et $w + \frac{\ell-1}{2}$. En particulier, $\frac{\ell-1}{2} + w$ est dans la liste (2), ce qui est absurde par l'inégalité $\frac{\ell-1}{2} + w \geq 2w > 2j + 3k - 4$.

Expliquons maintenant comment éliminer les cas restants, pour lesquels on a $7 \leq \ell \leq 41$. Regardons l'action de Frob_p sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ (avec $p \neq \ell$). C'est un élément de $\text{SO}(H)$ dont le polynôme caractéristique est la réduction modulo ℓ de

$$R_p(t) = (t - 1)(t^4 - at^3 + bt^2 - at + 1)$$

avec $a = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2p^w} - 2 \right)$ et $b = \tau_{j,k}(p^2)/p^w + 2$, comme on le vérifie facilement. Donc, si p est un nombre premier qui n'est pas un carré modulo ℓ , alors $r(\text{Frob}_p) \in \text{O}(P) - \text{SO}(P)$ d'après (1) et donc -1 est valeur propre, i.e. $R_p(-1) = 0$. On peut alors procéder de la manière suivante. On constate d'abord que l'un des premiers 2, 3, 5 est toujours un non-carré modulo ℓ lorsque $7 \leq \ell \leq 41$. On vérifie dans tous les cas que si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible (i.e. que le triplet (j, k, ℓ) est dans la liste du théorème 1.2), et si (j, k, ℓ) n'est ni $(6, 8, 13)$, ni $(4, 10, 17)$, alors il existe toujours $p \in \{2, 3, 5\}$ non carré modulo ℓ et tel que $R_p(-1) \neq 0$. Traitons par exemple le cas $(j, k) = (6, 8)$. Le cas $\ell = 13$ est exclus par l'énoncé. De plus, on vérifie que l'on a $R_2(-1) = 0$, $R_3(-1) = -2^7 \cdot 5^6 / 3^{13}$ et $R_5(-1) = -2^5 \cdot 3^{14} \cdot 13^2 \cdot 5^{-15}$. On a de plus $\ell \neq 11$ car $\overline{r_{6,8,11}}$ est réductible. On conclut car soit 3, soit 5, est non-carré modulo ℓ .

Cas (5) : Stabilisateur d'une cubique de $P(V)$. Dans ce cas, pour tout élément σ de G_ℓ , il existe $x, y, z \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^*$ tels que σ admet pour valeurs propres dans $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$ les éléments $x^a y^{3-a} z$, avec $0 \leq a \leq 3$. La restriction de $\overline{\rho}$ à I_ℓ se factorise par un quotient fini K de ce dernier, qui est produit semi-direct d'un groupe cyclique $\langle \tau \rangle$ d'ordre premier à ℓ par un ℓ -groupe fini (inertie sauvage). Appliquons l'observation précédente à l'élément $\sigma = \overline{\rho}(\tau)$. On sait que la semi-simplifiée de $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ est somme de quatre caractères χ_1, \dots, χ_4 . Les valeurs propres précédentes s'écrivent donc également $\chi_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 4$. On en déduit que quitte à renuméroter

les χ_i , on peut supposer que l'on a les égalités

$$\chi_1(\tau)/\chi_2(\tau) = \chi_2(\tau)/\chi_3(\tau) = \chi_3(\tau)/\chi_4(\tau).$$

Autrement dit, on a $\chi_1\chi_3 = \chi_2^2$ et $\chi_2\chi_4 = \chi_3^2$. Un argument similaire à celui du lemme 2.1 montre que sous l'hypothèse $\ell > 2w$, l'ensemble des poids de l'inertie modérée de V est de la forme $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ avec

$$k_1 + k_3 = 2k_2 \text{ et } k_2 + k_4 = 2k_3.$$

On en déduit que k_i et k_{i+2} ont même parité. C'est impossible, car dans la liste $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{0, k-2, j+k-1, j+2k-3\}$, les éléments de même parité sont consécutifs (noter que l'on a $j > 2$).

Enfin, pour traiter les cas restants, à savoir $7 \leq \ell \leq 41$, on observe que si $p \neq \ell$, les racines de $R_p(t)$ dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ sont de la forme $1, u^2, u, u^{-1}, u^{-2}$ avec $u \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$. En effet, l'action de Frob_p sur V a des valeurs propres de la forme $x^a y^{3-a} z$ avec $0 \leq a \leq 3$, $z \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$ et $x^3 y^3 z^2 = p^{j+2k-3} = \chi_\ell^w(\text{Frob}_p)$. Son action sur $\Lambda^2 V$ a donc pour valeurs propres $x^5 y z^2, x^4 y^2 z^2, x^3 y^3 z^2, x^3 y^3 z^2, x^2 y^4 z^2, x y^5 z^2$, d'où l'on déduit les valeurs propres de l'action sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ en divisant par $x^3 y^3 z^2$ et en posant $u = xy^{-1}$. Posons $Q_p(t) = R_p(t)/(t-1)$, alors les images dans $\mathbb{F}_\ell[t]$ de $Q_p(t)$ et $Q_p(t^2)$ ne sont pas premières entre elles. On vérifie à l'aide du logiciel PARI [10] que si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible, et si $7 \leq \ell \leq 41$, alors il existe toujours un nombre premier $p \in \{2, 3, 5\}$ tel que cette propriété est mise en défaut. Par exemple si $(j, k) = (8, 8)$, auquel cas $\ell = 13$ et 17 sont exclus (cas réductibles), le nombre premier $p = 2$ convient toujours.

Cas (6) et (7). Supposons $\ell \geq 7$. Dans ces cas, on observe que tout élément de PG_ℓ est d'ordre divisant 16, 20, 24 ou, si $\ell = 7, 14$. Supposons d'abord $\ell > 7$, alors ℓ ne divise pas l'ordre de G_ℓ , de sorte que l'inertie sauvage en ℓ agit trivialement dans V . Le groupe I_ℓ agit donc de manière diagonalisable sur $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$, à travers un quotient cyclique d'ordre premier à ℓ . Soient $\sigma \in G_\ell$ un générateur de l'image de I_ℓ et $N \geq 1$ l'ordre de l'image de σ dans PG_ℓ . D'après l'analyse ci-dessus, l'entier N divise 16, 20 ou 24. En particulier $N \leq 24$. De plus, σ^N agit par une homothétie sur V . Ainsi, si χ_1, \dots, χ_4 désignent les caractères de I_ℓ intervenant dans $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$, alors les χ_i^N , $i = 1, \dots, 4$, sont tous égaux. Supposons de plus que l'on a

$$\ell - 1 \geq 24w,$$

où $w = j + 2k - 3$. Pour chaque entier $1 \leq i \leq 4$, écrivons χ_i sous la forme $\psi_M^{a_0 + \ell a_1 + \dots + \ell^{M-1} a_{M-1}}$ avec $M \geq 1$ convenable et $0 \leq a_s \leq \ell - 1$ pour tout s . On sait que la collection des a_0 est exactement l'ensemble des poids de l'inertie modérée de V qui sont donnés par la proposition 2.2. Sous l'hypothèse $\ell - 1 \geq 24w$, les classe modulo ℓ de ces poids

multipliés par N restent distinctes. C'est bien entendu absurde.

Cette analyse montre que si $\ell > 24 \cdot 21 = 504$, alors on n'est jamais dans les cas (6) ou (7). Pour conclure, expliquons comment montrer que ces cas ne sont en fait pas possibles pour tout $\ell \geq 7$. Il n'y a qu'un nombre fini de cas à écarter. On procède de la manière suivante. Regardons à nouveau l'action de Frob_p sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ (avec $p \neq \ell$). C'est un élément de $\text{SO}(H)$ dont le polynôme caractéristique est la réduction modulo ℓ du polynôme $R_p(t)$ déjà introduit plus haut. Soit Q le polynôme $(t^{16} - 1)(t^{20} - 1)(t^{24} - 1)$. On vérifie, par exemple en utilisant le logiciel PARI [10], que pour chacun des 4 couples (j, k) , et pour tout $7 \leq \ell < 504$ tel que (j, k, ℓ) soit comme dans le théorème 1.3, alors $R_2(t)$, $R_3(t)$, $R_5(t)$ ou $R_{13}(t)$ ne divise pas $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_\ell[t]$. Par exemple, pour $(j, k) = (6, 8)$, et pour $7 \leq \ell < 504$, alors $R_2(t)$ (resp. $R_3(t)$, resp. $R_5(t)$) divise $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_\ell[t]$ si, et seulement si $\ell = 7, 11, 13, 17, 23, 47, 103, 107, 109, 461$ (resp. $\ell = 7, 11, 17, 23, 359$, resp. $\ell = 7, 11, 31$). Pour éliminer le cas $\ell = 7$, on constate que $R_{13}(t)$ ne divise pas $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_7[t]$.

L'image dans $\text{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$. La propriété (ii) de la représentation $r_{j,k,\ell}$, et la surjectivité du caractère cyclotomique $\chi_\ell : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times$, montrent que $\nu(G_\ell)$ est le sous-groupe des puissances w -ièmes du groupe \mathbb{Z}_ℓ^\times , avec $w = j + 2k - 3$. Il suffit donc de démontrer que si PG_ℓ contient $\text{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, et si $\ell > 3$, alors l'image de ρ contient $\text{Sp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.

On rappelle que si $\ell > 2$, le seul sous-groupe distingué non trivial de $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ est son centre $\{\pm 1\}$. Cela entraîne que si un sous-groupe H de $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ s'envoie surjectivement sur $\text{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, et si $\ell > 2$, alors $H = \text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ (sinon H serait un sous-groupe d'indice 2, nécessairement distingué, de $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$). Ceci étant dit, supposons que PG_ℓ contienne $\text{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Notons $D(K)$ le groupe dérivé du groupe K . On constate que $D(G_\ell)$ (qui est un sous-groupe de $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$) s'envoie surjectivement sur $D(\text{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)) = \text{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. La remarque précédente montre donc que $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell) = D(G_\ell) \subset G_\ell$. On conclut par le lemme suivant, dû à Serre [13, page 52].

Lemme 5.1. *Soient ℓ un nombre premier > 3 et G un sous-groupe fermé de $\text{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$ tel que son image dans $\text{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ contienne $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Alors G contient $\text{Sp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.*

6. CALCULS EXPLICITES

q	$\tau_{6,8}(q)$	$\tau_{8,8}(q)$
2	0	1344
3	-27000	-6408
4	409600	348160
9	333371700	748312020
5	2843100	-30774900
25	-15923680827500	-395299890927500
7	-107822000	451366384
49	-253514141409500	-155544419215478300
13	9952079500	-328006712228
169	-4843967045593944889100	-596184280686941758305260

q	$\tau_{12,6}(q)$	$\tau_{4,10}(q)$
2	-240	-1680
3	68040	55080
4	4276480	-700160
9	-8215290540	1854007380
5	14765100	-7338900
25	722477627072500	-904546757727500
7	334972400	609422800
49	-1126868422025500700	-391120313742441500
13	91151149180	-263384451140
169	-299941151717771094659180	323494600665947822387860

TABLE 1. Quelques valeurs propres des opérateurs de Hecke en genre 2 [3].

p	2	3
$A_{6,8}(p)$	$3^3.5.37.137.197.2039$	$2^{12}.5.17.109.54196568909$
$B_{6,8}(p)$	$2^{12}.3^3.5.11^2$	$2^{12}.3^9.5.11^2.53$
$C_{6,8}(p)$	$-2^{14}.3^2.5^2.13^2.229$	$-2^{14}.3^{10}.5^2.3251.5741$
$D_{6,8}(p)$	$-2^6.3^2.5.2731.2939.4567$	$-2^{14}.3^6.5.11.116167.61722049878337$

TABLE 2. Factorisations pour $(j, k) = (6, 8)$.

p	2	3
$A_{8,8}(p)$	$3^2.488358740729$	$2^{12}.11.13.43.67.64841599673$
$B_{8,8}(p)$	$2^{13}.3^2.5^2.13.43$	$2^{17}.3^8.5^2.11.13.67$
$C_{8,8}(p)$	$-2^{13}.3^2.17.23^3.37$	$-2^{13}.3^9.23^2.67.711097$
$D_{8,8}(p)$	$-2^6.3^2.5^3.7.301577.1891283$	$-2^9.3^6.5.41.1019.12011419289294459$

TABLE 3. Factorisations pour $(j, k) = (8, 8)$.

p	2	3
$A_{12,6}(p)$	$3^3.5.32581834951$	$2^{14}.5.11.121424757430201$
$B_{12,6}(p)$	$2^{13}.3^5.5.7.13.19$	$2^{13}.3^8.5.7.13.681589$
$C_{12,6}(p)$	$-2^{14}.3^3.7.13.257$	$-2^{14}.3^9.7.13.107.1801$
$D_{12,6}(p)$	$-2^4.3^3.5.7.612083.128494763$	$-2^8.3^4.5.13.757.41442159469563851813$

TABLE 4. Factorisations pour $(j, k) = (12, 6)$.

p	2	3
$A_{4,10}(p)$	$3^3.5^2.11.10861.54581$	$2^{11}.5^2.11.41.103.739.62253281$
$B_{4,10}(p)$	$2^{12}.3^2.5.11.41$	$2^{11}.3^{12}.5.11.41$
$C_{4,10}(p)$	$-2^{14}.3^4.11.67.36137$	$-2^{13}.3^{15}.11.17^3.173.2689$
$D_{4,10}(p)$	$-2^6.3^2.5.19.25841.51063917$	$-2^8.3^8.5^2.1151.10828398485532941$

TABLE 5. Factorisations pour $(j, k) = (4, 10)$.

RÉFÉRENCES

- [1] F. CALEGARI AND T. GEE, *Irreducibility of automorphic Galois representations of $GL(n)$, n at most 5*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 63 (2013), pp. 1881–1912.

- [2] G. CHENEVIER AND M. HARRIS, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math., 1 (2013), pp. 53–73.
- [3] G. CHENEVIER AND J. LANNES, *Formes automorphes et voisins de Kneser des réseaux de Niemeier*, ArXiv e-prints, (2015).
- [4] L. V. DIEULEFAIT, *On the images of the Galois representations attached to genus 2 Siegel modular forms*, J. Reine Angew. Math., 553 (2002), pp. 183–200.
- [5] J.-M. FONTAINE AND G. LAFFAILLE, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 15 (1982), pp. 547–608.
- [6] C. KHARE AND J.-P. WINTENBERGER, *Serre’s modularity conjecture. I*, Invent. Math., 178 (2009), pp. 485–504.
- [7] O. H. KING, *The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configurations*, in Surveys in combinatorics 2005, vol. 327 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 29–56.
- [8] T. MÉGARBANÉ, *Traces des opérateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de SO_7 , SO_8 ou SO_9 en niveau 1 et poids arbitraire*, ArXiv e-prints, (2016).
- [9] H. H. MITCHELL, *The subgroups of the quaternary abelian linear group*, Transactions of the American Mathematical Society, 15 (1914), pp. 379–396.
- [10] THE PARI GROUP, *PARI/GP version 2.7.0*, Bordeaux, 2014. available from : <http://pari.math.u-bordeaux.fr>.
- [11] J.-P. SERRE, *Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math., 15 (1972), pp. 259–331.
- [12] ———, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$* , Duke Math. J., 54 (1987), pp. 179–230.
- [13] ———, *Oeuvres, Collected papers. IV. 1985–1998*, Springer Collected Works in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2013. Reprint of the 2000 edition [MR1730973].
- [14] R. TSUSHIMA, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $\text{Sp}(2, \mathbf{Z})$* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 59 (1983), pp. 139–142.
- [15] G. VAN DER GEER, *Siegel Modular Forms*, The 1-2-3 of modular forms, (2008). Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004, Edited by Kristian Ranestad.
- [16] N. WACH, *Représentations cristallines de torsion*, Compositio Math., 108 (1997), pp. 185–240.
- [17] R. WEISSAUER, *Four dimensional galois representations*, Preprint, (2000).